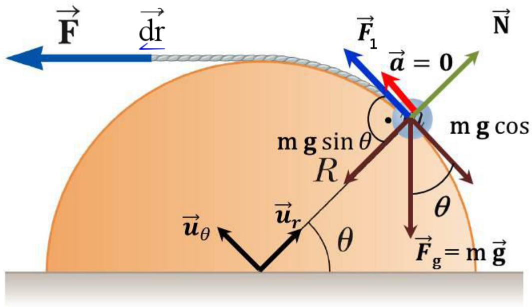
Exercice 1



a) Si la vitesse de la masse est constante, alors les forces normales donnent l'accélération centripète et les forces tangentielles doivent être en équilibre. Par conséquent, la réaction normale est

$$mg\sin\theta\vec{u}_r - \vec{N} = m\vec{a}_{cp}$$

et

$$\vec{F}_1 = mg\cos\theta\vec{u}_\theta,$$

les vecteur polaires $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ étant définis sur le schéma ci-dessus. Comme $\|\vec{F}\| = \|\vec{F}_1\|$, la deuxième équation nous donne le module de la force $\vec{F}$.

b) Utilisons le lien entre le déplacement du bout de la corde $\vec{dr}$ et la variation de l'abscisse curviligne sur le disque : $\|\vec{dr}\| = ds$ et l'angle correspondant $d\theta$: $\mathrm{d}s = R\mathrm{d}\theta$

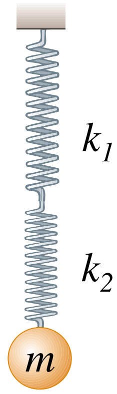
$$W = \int \vec{F}\vec{dr} = \int F dr = \int FR\mathrm{d}\theta = R\int F\mathrm{d}\theta$$

$$= R\int_0^{\pi/2} mg\cos\theta\mathrm{d}\theta = mgR[\sin(\pi/2) - \sin(0)] = mgR$$

C'est le même résultat si nous calculons la différence d'énergie potentielle entre le bas et le haut, et le résultat est indépendant du chemin emprunté.

Exercice 2

a) La masse suspendue se déplace vers le bas d'une quantité



$$x = x_1 + x_2 = \frac{mg}{k_1} + \frac{mg}{k_2} = mg\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)$$
$$= 1.5\text{kg} \cdot 9.81\text{m/s}^2 \left(\frac{1}{1200\text{N/m}} + \frac{1}{1800\text{N/m}}\right) = 2.04\text{cm}$$

b) Si les deux ressorts sont les mêmes, alors la distance d'extension totale est

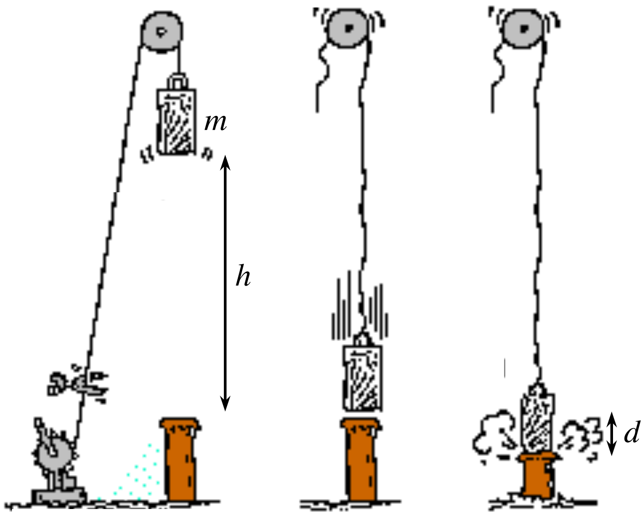
$$x = x_1 + x_1 = mg\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_1}\right)$$
$$= \frac{2 \cdot 1.5\text{kg} \cdot 9.81\text{m/s}^2}{1200\text{N/m}} = 2.45\text{cm}$$

c) Nous définissons la constante de rappel de deux ressorts en série :

$$k = \frac{F}{x} = \frac{mg}{mg(1/k_1 + 1/k_2)} = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)^{-1}$$

La constante de ressort est donc le moyen harmonique des constantes de ressort individuelles. La raison est que la force exercée sur les deux ressorts est identique, mais l'élongation totale est la somme des élongations individuelles. Cette petite démonstration démontre l'importance des facteurs géométriques dans la détermination de cette constante.

Exercice 3

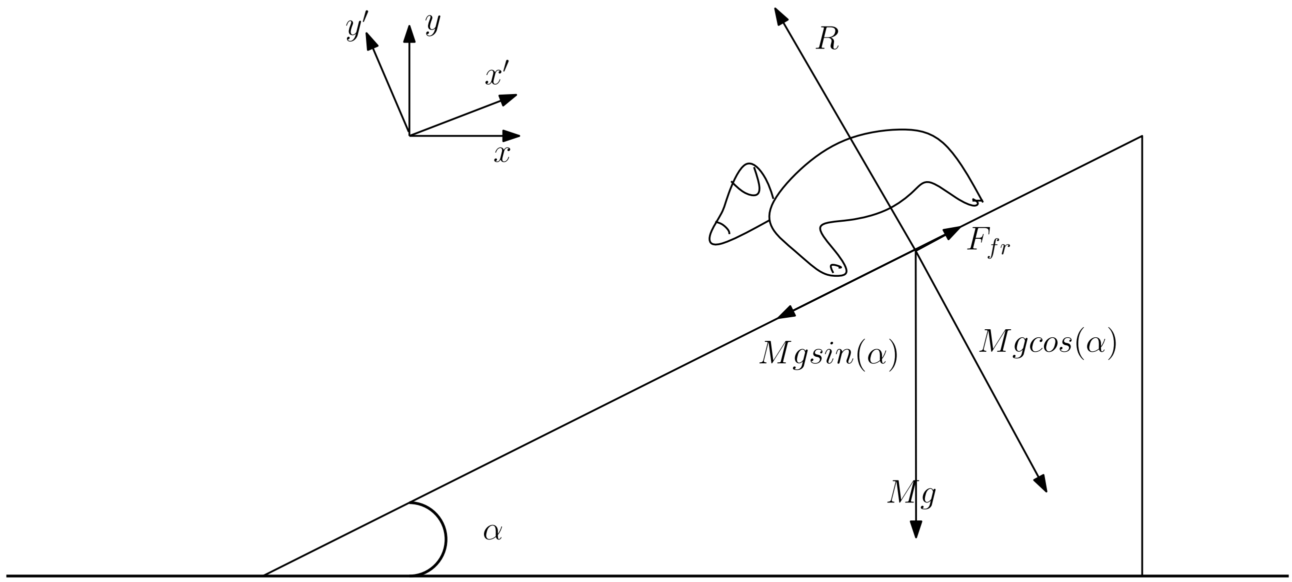


Considérons le travail effectué par l'appareil de battage à partir du moment où il commence à tomber jusqu'à ce qu'il s'immobilise après avoir enfoncé la poutre. Soit $h = 5$ m la distance sur laquelle le poids tombe librement, et $d = 0.12$ m la profondeur à laquelle la poutre est enfoncée. La variation de l'énergie potentielle du mouton est donc $\Delta E = mg(h + d)$. Cette énergie est dissipée par le frottement entre poutre et sol. Cette force de frottement agit pendant la déplacement de la poutre, d. Le mouton est immobile au départ et aussi à la fin du processus, l'énergie cinétique n'intervient donc pas dans le problème. Le bilan énergétique s'écrit

$$W = Fd = mg(h + d)$$

$$\Rightarrow F = \frac{mg(h + d)}{d} = 878\text{kN}$$

Exercice 4



Notons M la masse du cochon, L la longueur du plan incliné et $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur.

1. Sans frottement.
   Faisons le bilan des forces sur le cochon incluant son poids et la force de réaction du plan incliné :
   $$M\vec{g} + \vec{R} = M\vec{a} \tag{1}$$
   Projetons sur $(\vec{x'}, \vec{y'})$:
   $$\begin{cases} Mg\sin(\alpha) = Ma_{x'} \\ Mg\cos(\alpha) = R \end{cases} \rightarrow a_{x'} = g\sin(\alpha)$$
   Le temps nécessaire pour glisser jusqu'au pied du plan incliné est donné par :
   $$t = \sqrt{2L/a_{x'}}$$

2. Avec frottement.
   Dans ce cas on tient compte de la force de frottement dynamique :

$$M\vec{g} + \vec{R} + \vec{F}_{fr} = M\vec{a}^{fr} \tag{2}$$

   Projetons sur $(\vec{x'}, \vec{y'})$:

$$\begin{cases} Mg\sin(\alpha) - F_{fr} = Ma_{x'}^{fr} \\ Mg\cos(\alpha) = R \\ F_{fr} = \mu R \end{cases} \rightarrow a_{x'}^{fr} = g(\sin(\alpha) - \mu\cos(\alpha))$$

   Le temps nécessaire pour glisser jusqu'au bord :

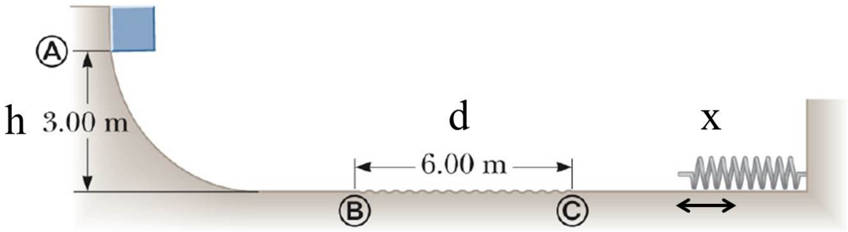
$$t_{fr} = \sqrt{2L/a_{x'}^{fr}}$$

Donc :

$$t_{fr} = 2t$$

$$\mu = \frac{3}{4}\tan(\alpha) \simeq 0.53$$

Exercice 5



L'énergie est conservée au cours du mouvement du bloc sauf dans la région où les frottements sont non nuls. Ces derniers effectuent un travail $W_{\text{friction}} = \mu F_n d$ entrainant une perte d'énergie, où F_n est la réaction normale du sol au poids du bloc, soit $\|F_n\| = mg$; ainsi, l'énergie perdue en raison des frottements est $W_{friction} = \mu mgd$.
La conservation de l'énergie donne donc :

$$E_{\text{initiale}} - W_{\text{friction}} = E_{\text{finale}}$$

$$E_{\text{potentielle de pesanteur}} - W_{\text{friction}} = E_{\text{potentielle élastique}}$$

$$\Rightarrow mgh - \frac{1}{2}kx^2 - \mu mgd = 0$$

$$\mu = \frac{mgh - \frac{1}{2}kx^2}{mgd} = \frac{10\text{kg} \cdot 9.81\text{m/s}^2 \cdot 3\text{m} - \frac{1}{2} \cdot 2250\text{N/m} \cdot (0.3\text{m})^2}{10\text{kg} \cdot 9.81\text{m/s}^2 \cdot 6\text{m}} = 0.328$$